WB200: Is een wiskundig bewijs onomstotelijk?
Gemaakt door dio's wiskunde ICLON o.l.v. Peter Kop

Leerdoel: kritisch kijken naar wiskundige redeneringen

Niveau: 5 en 6 vwo

Zijn wiskundige bewijzen onomstotelijk waar? Daar is heel wat over te zeggen. In de wiskunde gebruiken we stellingen. We noemen een uitspraak of bewering een stelling als die bewezen is. Toch moeten we ergens beginnen.

Vragen

1. Wanneer weet je zelf iets zeker? Wanneer moet of wil je zelf iets bewijzen?
2. In de wiskunde gaat men er vaak van uit dat iets *waar is* óf *niet waar*. In ons dagelijks leven ligt dat iets gecompliceerder. Lees de volgende uitspraak maar eens: 'Geef me nu uitsluitsel: of je houdt van me of je houdt niet van me.' Geef meer van deze voorbeelden.
3. Bekijk de stappen van Bas Haring hieronder en geef bij iedere stap een argument waarom de uitspraak waar is. Ben je overtuigd van de waarheid van de stelling?

uitspraak	argument waarom uitspraak waar is
Stel $\sqrt{2}$ is rationaal, dan $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$, waarbij de breuk niet vereenvoudigd kan worden	
Als $\sqrt{2}=\frac{n}{m}$ dan geldt: $2=\frac{n^2}{m^2}$ en dus $2.m^2=n^2$	
n moet even zijn, dus $n=2.p$ met *p* een geheel getal	
Nu moeten gelden dat: $2.m^2=(2.p)^2=4.p^2$	
Dus *m* moet even zijn: $m=2.g$ met *g* geheel	
Dus geldt nu: $\sqrt{2}=\frac{2.p}{2.g}$	

Maar dit is in strijd met de aanname; dus aanname dat $\sqrt{2}$ is rationaal is fout dus $\sqrt{2}$ is irrationaal	

4. Verzin een logische redenering waarin je in een aantal redeneerstappen tot de conclusie komt dat je ouders je meer zakgeld moeten geven. Het is wellicht mogelijk dat je ouders instemmen met alle redeneerstappen, maar toch je conclusie niet delen.
5. Stellingen die we voor waar aannemen - zonder bewijs - noemen we axioma's. Op basis van axioma's, kunnen we vermoedens formuleren en deze bewijzen. Zo ontstaan stellingen en met deze stellingen kunnen we verder redeneren en nieuwe stellingen bewijzen. Er ontstaat een heel bouwwerk aan stellingen.

   Stellingen zijn van de vorm: als *'A'* dan *'B'*. Een aantal voorbeelden.

   1. Als het regent, dan zijn de straten nat.
   2. Als $x = 2$ dan is $x^2 = 4$
   3. Als een vierhoek een ruit is dan delen de diagonalen elkaar middendoor.
   4. Als $x = 2$ dan is $2x + 3 = 7$

   We kunnen A en B in een stelling vaak niet omdraaien. Als de straten nat zijn, hoeft het nog niet geregend te hebben. Als $x^2 = 4$, dan kan ook $x = -2$. Als de diagonalen van een vierhoek elkaar in het midden delen, dan hoeft de vierhoek geen ruit te zijn. Maar soms is het wel mogelijk: immers als $2x + 3 = 7$ dan is $x = 2$.

   Dus in een stelling 'als *'A'* dan *'B''* kunnen we niet *A* en *B* omdraaien, maar we kunnen wel een equivalente stelling formuleren. Er geldt namelijk wel altijd: als *'niet B'* dan *'niet A'*.

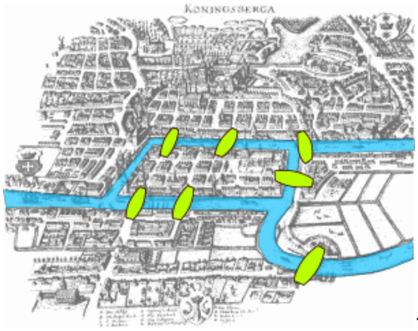
   Ga deze laatste stelling (niet B dan niet A) na voor de 4 voorbeelden die in deze vraag staan

6. Het intuïtionisme is een stroming die rond 1900 ontstond met onder andere de Nederlander Brouwer. In hun logica is de regel van het uitgesloten derde niet geldig. Deze regel van het uitgesloten derde zegt dat voor elke uitspraak geldt: 'A' is waar of 'niet A' is waar. In de klassieke logica is deze regel geaccepteerd. Deze regel is de basis voor bewijzen uit het ongerijmde.

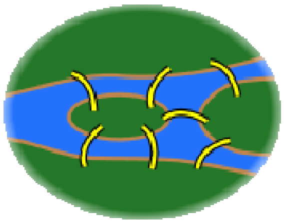
   Dus als iets bewezen is, kunnen er toch discussies ontstaan omdat de bewijsregels niet onderschreven hoeven te worden. Bewijzen blijft mensenwerk. Binnen een gemeenschap moet afgesproken worden wat de bewijsregels zijn. Wordt er een nieuw bewijs geleverd, dan controleert die gemeenschap of het bewijs juist is (en dus volgens de bewijsregels geleverd is). Is het bewijs goedgekeurd en verandert de gemeenschap de bewijsregels niet, dan is het bewijs onomstotelijk.

Bestudeer het volgende probleem.

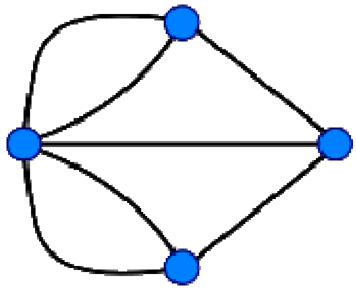
De stad Koningsbergen lag in het oosten van Pruisen aan de rivier de Pregel. In de rivier lagen twee eilanden die door zeven bruggen met elkaar en met de vaste wal verbonden waren. Zie *hieronder verschillende afbeeldingen daarvan. Is het nu mogelijk om zó te wandelen dat je precies één maal over elke brug loopt.*



→



→



a. Waarom verander je de plaatjes?
b. Formuleer een vermoeden of het mogelijk is om deze wandeling zo te maken dat je over iedere brug precies een maal loopt. Geef ook een bewijs van je vermoeden (zo maak je dus een stelling).

Tips voor docenten

vraag 1

In het boek *De monnik en de filosoof* komen een westerse filosoof en een boeddhistische monnik tot een compromis: Iets is waar voor je als je:

- het zelf meegemaakt hebt;
- een wiskundig bewijs gezien hebt;
- het van iemand gehoord hebt die nog nooit tegen gelogen heeft.

Wat vind je van deze waarheidsredenen?

vraag 5

Nog een ander voorbeeld en hoe hier gebruik van te maken:

> *Stelling (* ‘als *‘A’* dan *‘B’*) : *Gegeven een positief geheel getal n. Als n geen kwadraat is, dan is $\sqrt{n}$ irrationaal (niet te schrijven als een breuk).*

Dan geldt een equivalente stelling:

> *Stelling (*als *‘niet B’* dan *‘niet A’*) *: Gegeven een positief geheel getal n. Als $\sqrt{n}$ rationaal (wortel n is te schrijven als een breuk) is, dan is n een kwadraat.*

Om de eerste stelling te bewijzen kunnen we ook de tweede stelling bewijzen. Dat is hier simpeler.

> Bewijs: We nemen daartoe aan dat $\sqrt{n}$ rationaal (te schrijven is breuk) is. Dan kunnen we positieve gehele getallen *a* en *b* vinden zodat $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ waarbij de breuk niet meer te vereenvoudigen is. Nu geldt dat $n = \frac{a^2}{b^2}$ niet verder vereenvoudigd kan worden. Dus, omdat n een geheel getal was, geldt dat $b^2 = 1$. Dus $n = a^2$. Daarmee is de equivalente stelling bewezen en dus ook de oorspronkelijke.

Tot nu lijkt het erop dat we ‘harde’ logica gebruikt hebben waar geen speld tussen te krijgen is. Toch kan er discussie ontstaan.

In het bewijs dat $\sqrt{2}$ een irrationaal getal is zijn we er van uit gegaan dat $\sqrt{2}$ een rationaal getal was. Vervolgens gingen we redeneren en kwamen we uit oip een tegenspraak. Dus, omdat we bij het redeneren geen fout maakten, is er een fout in onze aanname: $\sqrt{2}$ is dus niet een rationaal getal.

Deze wijze van redeneren noemen we een bewijs uit het ongerijmde. Dit is een speciaal geval van de redenering ‘als *‘niet B’* dan niet *‘A’*’, die we hiervoor zagen.